ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6ο (ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ LEBESGUE)

Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χ.μ. (για όλο το κεφάλαιο)

Ορισμός: Έστω $f: X \to [0, +\infty)$ μία απλή συνάρτηση
Αν η f σε κανονική μορφή γράφεται $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$
τότε ορίζουμε το

$$\int f \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i)$$ να είναι το ολοκλήρωμα
(Lebesgue) της f ως προς μ.

Ορίζουμε $0(+\infty) = 0$
Προφανώς $\int f \, d\mu \in [0, +\infty)$

ΛΗΜΜΑ
Αν $f \geq 0$ απλή και $b_1, b_2, \ldots, b_m$ εν $\mathbb{R}$ και $B_1, B_2, \ldots, B_m$
ξένα ανά δύο ώστε η $f = \sum_{j=1}^{m} b_j \chi_{B_j}$ τότε

$$\int f \, d\mu = \sum_{j=1}^{m} b_j \mu(B_j)$$

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι $\bigcup_{j=1}^{m} B_j = X$ (διότι αν δεν ισχύει αυτό τότε θέτουμε $B_{m+1} = X \setminus \bigcup_{j=1}^{m} B_j$ και $b_{m+1}=0$ και έχουμε $f = \sum_{j=1}^{m} b_j \chi_{B_j}$ και $\sum_{j=1}^{m} b_j \mu(B_j) = \sum_{j=1}^{m+1} b_j \mu(B_j)$)

Θεωρούμε την κανονική μορφή της f

$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$ η κανονική μορφή της f

Παρατηρούμε ότι αν $A_i \cap B_j \neq \emptyset$ τότε $a_i = b_j$ και έπεται ότι $\alpha_i \cdot \mu(A_i \cap B_j) = b_j \mu(A_i \cap B_j)$ $\forall i,j$ διότι αν $x \in A_i \cap B_j$ τότε $\alpha_i = f(x) = \beta_j$ και $\alpha_i \cdot \mu(A_i \cap B_j) = b_j \mu(A_i \cap B_j)$ για κάθε i και j.

Και
$$\left.\begin{array}{l} A_i = \bigcup_{j=1}^{m} (A_i \cap B_j) \\ B_j = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B_j) \end{array}\right\} \text{ξένες ενώσεις}$$

Έτσι
$$\int f \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i) \overset{\text{ξένες}}{=} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{m} \mu(A_i \cap B_j) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap B_j) =$$
$$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \beta_j \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mu(B_j)$$

Πρόταση

Αν $f, g \geq 0$ απλές και $\alpha \geq 0$

1) $\int \alpha f \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu$

2) $\int (f+g) \, d\mu = \int f d\mu + \int g \, d\mu$

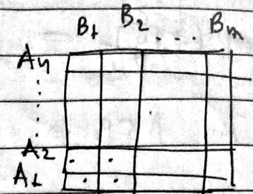
3) Αν $f \leq g \Rightarrow \int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$

Απόδειξη

1) Έστωσαν $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$ & $g = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \chi_{B_j}$
όπου $\alpha_i, \beta_j \geq 0$
$A_i \in \mathcal{A}$ ξένα, $B_j \in \mathcal{A}$ ξένα και $X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{j=1}^{m} B_j$

i) $\int \alpha f \, d\mu = \int \sum_{i=1}^{n} \alpha \cdot \alpha_i \chi_{A_i} \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha \cdot \alpha_i \, \mu(A_i) =$

$= \alpha \cdot \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \mu(A_i) = \alpha \cdot \int f \, d\mu.$



ii) $f+g = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (\alpha_i + \beta_j) \chi_{A_i \cap B_j}$

όπου $(A_i \cap B_j)_{(i,j)}$, $\forall i,j = 1,2,\dots,n,m$
είναι ξένα ανά δύο στοιχεία της $\mathcal{A}$
Από προηγούμενο λήμμα:

$$\int (f+g) \, d\mu \overset{\text{Λήμμα}}{=\!=} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (\alpha_i + \beta_j) \, \mu(A_i \cap B_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{m} \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{j=1}^{m} \beta_j \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i \cap B_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \mu(A_i) + \sum_{j=1}^{m} \beta_j \, \mu(B_j) = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$$

iii) $g - f \geq 0$ απλή
Τότε $\int g \, d\mu = \int (f + g - f) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int (g-f) \, d\mu \geq \int f \, d\mu.$

Ορισμός: Αν $f : X \to [0,+\infty]$ μετρήσιμη τότε ορίζουμε ως ολοκλήρωμα $\int f \, d\mu = \sup\{\int s \, d\mu : s \text{ απλή}, \ 0 \leq s \leq f\}$ της f ως προς μ.

Αν η f είναι απλή τότε τούτος ο ορισμός συμπίπτει με τον ορισμό του ολοκληρώματος που δόθηκε αρχικά για απλές συναρτήσεις
Για $A \in \mathcal{A}$ ορίζουμε

$\int_A f \, d\mu = \int f \chi_A \, d\mu$ και ονομάζεται ολοκλήρωμα της f στο σύνολο A.

Αν $A = X$ τότε

$\int_A f \, d\mu = \int_X f \, d\mu =: \int f \, d\mu.$

Γενικά παρατηρούμε ότι $\int_A f \, d\mu \in [0,+\infty]$

Πρόταση

Έστωσαν f και $g \geq 0$ και μετρήσιμες, $A, B \in \mathcal{A}$, $\alpha \geq 0$

1) $\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu$

2) Αν $f \leq g \Rightarrow \int f d\mu \leq \int g d\mu$

3) Αν $A \subseteq B \Rightarrow \int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu$

4) Αν $\mu(A) = 0$ ή αν $f = 0$ στο A, τότε $\int_A f d\mu = 0$

Απόδειξη

1) • $\alpha = 0$ προφανές

• $\alpha > 0$ τότε

$\int a f d\mu = \sup \{ \int s d\mu : s$ απλή $\& \ 0 \leq s \leq af \} =$

$= \sup \{ a \int \frac{s}{a} d\mu : \frac{s}{a}$ απλή $\& \ 0 \leq \frac{s}{a} \leq f \} =$

$= \sup \{ a \int t d\mu : t$ απλή $\& \ 0 \leq t \leq f \} =$

$= a \cdot \sup \{ \int t d\mu : t$ απλή $\& \ 0 \leq t \leq f \} = a \int f d\mu$.

2) Άρα $\{ \int s : s$ απλή: $0 \leq s \leq f \} \overset{f \leq g}{\subseteq} \{ \int s : s$ απλή $0 \leq s \leq g \}$

Άρα $\sup \{ \int s : s$ απλή $0 \leq s \leq f \} \leq \sup \{ \int s : s$ απλή $0 \leq s \leq g \}$

$\int f d\mu \leq \int g d\mu$

3) $A \subset B \Rightarrow f \chi_A \leq f \cdot \chi_B \overset{(2)}{\Rightarrow} \int f \chi_A \leq \int f \chi_B \Rightarrow \int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu$

4) Αν $f = 0$ στο A (δηλ. $f/A = 0$) τότε

$f \cdot \chi_A = 0$. Άρα $\int_A f d\mu = \int f \cdot \chi_A d\mu = 0$

Αν είναι $\mu(A) = 0$, παίρνουμε για s απλή με $0 \leq s \leq f \chi_A$

Έστω $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$ με $A_i \in \mathcal{A}$ ξένα ανά δύο

Τότε $\int s\,d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cancel{\mu(A_i \cap A)}^{0} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cancel{\mu(A_i \setminus A)}^{0} = 0$

διότι

αν $\mu(A_i \setminus A) \neq 0$

$\exists\, x \notin A \Rightarrow f\chi_A(x) = 0$

άρα $\underset{0}{s(x)} \leq f \cdot \chi_A(x) = 0$

Άρα, $\int_A f\,d\mu = \int f \chi_A\,d\mu = 0$.

ΛΗΜΜΑ

Αν $s : X \to [0,+\infty)$ απλή συνάρτηση και θέσαμε $\nu : \mathcal{A} \to [0,+\infty]$ με $\nu(A) = \int_A s\,d\mu$ τότε το ν είναι μέτρο

Απόδειξη

Αφού s απλή τότε $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$ $\alpha_i \geq 0$, $A_i \in \mathcal{A}$ ξένα

$\nu(A) = \int_A s\,d\mu = \int_A \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}\,d\mu = \int \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i} \chi_A\,d\mu =$

$= \int \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i \cap A}\,d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap A) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \mu_i(A)$

περιορισμός του A στα A_i

Όπου $\mu_i(A) = \mu(A_i \cap A)$, $\forall A \in \mathcal{A}$ είναι μέτρο

Άρα, αφού το ν γράφτηκε ως γραμ. συνδυασμός μέτρων με θετικούς συντελεστές τότε ν είναι μέτρο.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΟΝΟΤΟΝΗΣ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ ΤΟΥ LEBESGUE (ΘΜΣ)

Έστω $f_n : X \to [0,+\infty]$, $n = 1,2,\ldots$ μια αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και θέτουμε ως $f = \lim_n f_n$ τότε $\lim_n \int f_n\,d\mu = \int f\,d\mu$.

Απόδειξη

Η f ορίζεται αφού $\forall x \in X : (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \uparrow$

$f \geq 0$ (διότι $f_n \geq 0$), f μετρήσιμη (αφού f_n μετρήσιμες)

Επιπλέον $f_n \leq f_{n+1} \leq f \Rightarrow \int f_n\,d\mu \leq \int f_{n+1}\,d\mu \leq \int f\,d\mu$

Τότε $\exists \lim_n \int f_n\,d\mu$ και τ.ω. $\lim_n \int f_n\,d\mu \leq \int f\,d\mu$

Αρκεί ν.δ.ο ισχύει το αντίστροφο δηλ. αν θέσω $\alpha := \lim_n \int f_n\,d\mu$ τότε μένει ν.δ.ο $\alpha \geq \int f\,d\mu$.

Έστω s τυχαία και απλή τ.ω. $0 \leq s \leq f$ και θεωρώ $\theta : 0 < \theta < 1$

Θεωρούμε τα σύνολα $A_n = [f_n \geq \theta s]$ $n=1,2,\dots$. Τότε $A_n \in \mathcal{A}$ $n=1,2,\dots$ (διότι f_n, s μετρήσιμες)

$(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αύξουσα διότι f_n αύξουσα $A_n \subseteq A_{n+1} = [f_{n+1} \geq \theta s]$

και ισχυρίζομαι $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Έστω $x \in X$.

- Αν $f(x)=0 \Rightarrow s(x)=0$. Άρα $x \in A_1 \Rightarrow x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$
- Αν $f(x) > 0 \Rightarrow \theta s(x) < f(x)$.

Τότε $\exists n \in \mathbb{N}$ τέτοιο $\theta s(x) < f_n(x) \Rightarrow x \in A_n$

Άρα, όπως $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

Θέτουμε $\nu : \mathcal{A} \to [0,+\infty]$ με $\nu(A) = \int_A s\, d\mu$ από το προηγούμενο λήμμα το ν είναι μέτρο.

Έτσι, παίρνουμε την ποσότητα $\theta \nu(A_n)$

$$\theta \nu(A_n) = \int_{A_n} \theta s\, d\mu = \int \theta s \chi_{A_n} d\mu \leq \int f_n \chi_{A_n} d\mu \leq$$

$$\leq \int f_n d\mu, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall \theta : 0<\theta<1$$

$n \to \infty$: $\quad \theta \cdot \nu(X) \leq \alpha$

$\theta \to 1^-$: $\quad \nu(X) \leq a$

δηλαδή $\quad \int s\, d\mu \leq a$, $\forall s$ απλή με $0 \leq s \leq f$

Άρα, $\sup\{\int s\, d\mu : s \text{ απλή}, 0 \leq s \leq f\} \leq a \Rightarrow$

$$\boxed{\int f\, d\mu \leq a}$$

<u>Πρόταση:</u>

Αν $f, g : X \to [0,+\infty]$ μετρήσιμες τότε

$\int (f+g)\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu$

<u>Απόδειξη</u>

Υπάρχουν $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αύξουσες ακολουθίες συναρτήσεων απλών θετικών με $s_n \to f$ και $t_n \to g$

Επίσης, $(s_n + t_n) \uparrow$ και μάλιστα $s_n + t_n \to f+g$

$$\int (f+g)\, d\mu = \lim_n \int (s_n + t_n)\, d\mu \overset{\text{γραμμικ. απλών}}{=} \lim_n \int s_n\, d\mu + \lim_n \int t_n = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu$$

Άρα, πλέον μπορούμε να δηλώσουμε ότι $\forall \alpha,\beta \geq 0$ και $f,g \geq 0$ μετρήσιμες ισχύει:

$$\int(\alpha f + \beta g)\,d\mu = \alpha\int f\,d\mu + \beta\int f\,d\mu.$$

<u>Πόρισμα</u> (Beppo-Levi)

Αν $f_n : X \to [0,+\infty]$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων τότε:

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int f_n\,d\mu.$$

<u>Απόδειξη</u>

Θέτουμε $g_n = \sum_{i=1}^{n} f_i$ αύξουσα ($f_i \geq 0$), $g_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

g_n μετρήσιμη, $\forall n \in \mathbb{N}$ και $\lim_n g_n = f$

Άρα από τα προηγούμενα

$$\int g_n\,d\mu = \int \sum_{i=1}^{n} f_i\,d\mu \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$n \to \infty$: (από Θ.Μ.Σ) $\int f\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int f_n\,d\mu$

<u>Λήμμα του Fatou</u>

Έστω $f_n : X \to [0,+\infty]$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων για $n=1,2,\dots$ τότε

$$\int \liminf_n f_n\,d\mu \leq \liminf_n \int f_n\,d\mu$$

<u>Απόδειξη</u>

Θέτουμε $g_n = \inf_{k \geq n} f_k$ προφανώς $g_n \uparrow$, ακολουθία θετικών μετρήσιμων συναρτήσεων, $g_n \leq f_n$, $\lim g_n = \liminf_n f_n$

Έτσι, από το Θεώρημα μονότονης σύγκλισης το

$$\int \liminf f_n\,d\mu = \lim_n \int g_n\,d\mu = \liminf_n \int g_n\,d\mu \leq \liminf_n \int f_n\,d\mu.$$